

Olimpiada de matematică
Etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

Clasa a VIII-a

I. 7 p

$$\begin{cases} |x+3|=5 \\ |2y-1|=3 \end{cases} \quad 3 \text{ p}$$

$$\begin{cases} x+3=\pm 5 \\ 2y-1=\pm 3 \end{cases} \quad 2 \text{ p}$$

$$S = \{(2, 2); (2; -1); (-8; 2); (-8; -1)\} \quad 2 \text{ p}$$

II. 7 p

a) $(b-d)\sqrt{3} + (a-c) = 0$ 1 p

Finalizare 1 p

b) Presupunem prin reducere la absurd că există $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ a.î.

$$1 + \sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab + c^2 + 3d^2 + 2\sqrt{3}cd \quad 1 \text{ p}$$

$$1 + \sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + c^2 + 3d^2 + \sqrt{3}(2ab + 2cd) \quad 1 \text{ p}$$

$$a^2 + 3b^2 + c^2 + 3d^2 = 1 \text{ și } 2ab + 2cd = 1 \quad | \cdot (-\sqrt{3}) \quad 1 \text{ p}$$

$$a^2 + 3b^2 - 2ab\sqrt{3} + c^2 + 3d^2 - 2cd\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} \quad 1 \text{ p}$$

$$(a - \sqrt{3}b)^2 + (c - \sqrt{3}d)^2 = 1 - \sqrt{3}$$

Sumă de numere nenegative = număr negativ! $\Rightarrow S = \emptyset$ 1 p

III. 7 p

$$(A'B'C) \perp (AD'B) \quad 2 \text{ p}$$

$$AD' \perp (A'B'C), AD' \cap (A'B'C) = \{M\} \quad 1 \text{ p}$$

$$MP \perp A'C, P \in (A'C) \Rightarrow d(CA', AD') = MP \quad 2 \text{ p}$$

$$MP = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad 2 \text{ p}$$

IV. 7 p

Construim (BM), (CN) și (CP) medianele în ΔBCD .

$$(ACD) \cap (AGB_1) = B_1M; (ABD) \cap (AGC_1) = C_1N; (ABC) \cap (AGD_1) = D_1P \quad 2 \text{ p}$$

$$\Delta AGM \sim \Delta B_1BM \Rightarrow BB_1 = 3AG$$

$$\Delta AGN \sim \Delta C_1CN \Rightarrow CC_1 = 3AG$$

$$\Delta AGP \sim \Delta D_1DP \Rightarrow DD_1 = 3AG$$

2 p

BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , BDD_1B_1 paralelograme

2 p

$(B_1C_1D_1) \parallel (BCD)$

1 p